

 SESSION 2024

## Baccalauréat de l'Enseignement Général — Série S

### Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures — Coefficient : 6

*Les exercices et les problèmes sont obligatoires.*

### Exercice 1

3 points

I.

1. Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  le système

$$\begin{cases} \text{pgcd}(x, y) = 12 \\ x + y = 120 \end{cases}$$

(0,5 pt)

2. Effectuer la division euclidienne de  $-31$  par  $5$ .

(0,5 pt)

3. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  le système

$$\begin{cases} 2x + 3y = \bar{2} \\ 3x - y = \bar{0} \end{cases}$$

(0,5 pt)

II. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer  $2A - A^2$ . (0,5 pt)
- (b) En déduire alors la matrice  $A^{-1}$  inverse de  $A$ . (0,5 pt)
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $B^n = 9^{n-1}B$ . (0,5 pt)

### Exercice 2

2 points

On considère les points  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(-2; 1; -1)$  et  $C(3; 2; 2)$ .

1. (a) Calculer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ . (0,25 pt)

- (b) En déduire l'équation cartésienne du plan  $(ABC)$ . (0,5 pt)
2. On considère la sphère  $(S)$  d'équation cartésienne :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 8 = 0$ .  
Déterminer le centre  $I$  et le rayon  $R$  de  $(S)$ . (0,5 pt)
3. On considère la droite  $(\Delta)$  qui passe par le point  $I(2; -2; 1)$  centre de sphère  $(S)$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .  
(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ . (0,25 pt)  
(b) Déterminer les coordonnées de  $H$  point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  au plan  $(ABC)$ . (0,5 pt)

## Problème 1

7 points

Dans un plan orienté  $(P)$ , on considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de côté 4cm.

On note par :

- $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs de  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$
- $r_B$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$
- $r_C$  la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$
- $f = r_B \circ r_C$  et  $S$  la similitude plane directe telle que :  $S(A) = I$  et  $S(I) = C$

## PARTIE A

1. Soit  $G$  le barycentre du système  $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$ .  
(a) Vérifier que  $G$  est le milieu du segment  $[AI]$ . (0,25 pt)  
(b) Déterminer et construire l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  du plan tels que :

$$2 \left\| \overrightarrow{MA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{MB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{MC} \right\|^2 = 32.$$

(0,5 pt)

2. (a) Quelle est la nature de la transformation  $f$ ? (0,25 pt)  
(b) Donner les éléments caractéristiques de  $f$  en décomposant  $r_B$  et  $r_C$  en produit de deux symétries orthogonales convenablement choisies. On note par  $O$  le centre de  $f$ . (0,5 pt)
3. Soit la transformation  $g = f \circ S_{(AI)}$  où  $S_{(AI)}$  est une réflexion d'axe  $(AI)$ .  
Caractériser la transformation  $g$ , en décomposant  $f$  en deux réflexions bien choisies. (1 pt)
4. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe  $S$  puis construire son centre  $\Omega$ . (0,5 pt)

**PARTIE B**

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormé  $(B, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  avec  $\vec{e}_1 = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ , dans ce repère, on donne le point  $A(2; 2\sqrt{3})$ .

1. Donner les affixes des points  $B$  et  $C$ . (0,5 pt)
2. (a) Donner les expressions complexes de  $r_B$ ,  $r_C$  et  $S_{(AI)}$ . (1,5 pts)  
(b) Donner alors les éléments caractéristiques de  $f$  et  $g$ . (1 pt)
3. (a) En utilisant les hypothèses  $S(A) = I$  et  $S(I) = C$ , déterminer les expressions complexes de  $S$ . (0,5 pt)  
(b) Retrouver alors les éléments caractéristiques de  $S$ . (0,5 pt)

**Problème 2**

8 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}, & \text{si } x \in ]0; 1[ \\ (3x - 3)e^{-x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  unité 4cm.

**Partie A**

1. Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ . (0,5 pt)
2. (a) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$ . (0,5 pt)  
(b) Interpréter graphiquement les résultats. (0,5 pt)
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (0,5 pt + 0,5 pt)
4. (a) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in ]0; 1[$  puis étudier son signe. (0,5 pt)  
(b) Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 1$  puis étudier son signe. (0,5 pt)  
(c) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,5 pt)
5. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  en précisant les demi-tangentes en  $x_0 = 1$ . (1 pt)
6.  $\lambda$  est un nombre réel strictement positif. On pose  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t) dt$ .  
(a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ . (0,5 pt)  
(b) Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$ . (0,5 pt)

**Partie B**

1.  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n-1$ .

- (a) Démontrer qu'en utilisant la variation de  $f$  sur l'intervalle  $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ ,  
on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(0,5 pt)

- (b) En déduire que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \\ & \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt \\ & \leq \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

(0,5 pt)

2. Pour  $n \geq 2$ , on pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right].$

- (a) Déduire de la question 1.b. que :  $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$  (0,5 pt)

- (b) Démontrer que alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}.$  (0,5 pt)